绝密 ★ 考试结束前

全国2018年4月高等教育自学考试

线性代数试题

课程代码:02198

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

说明：在本卷中，A^T表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$r(A)$表示矩阵A的秩.

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设2阶行列式$\begin{vmatrix} 2a_{21} & 2a_{22} \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} \end{vmatrix}=m$，则$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=$

A. $-2m$　　B. $-\dfrac{m}{2}$　　C. $\dfrac{m}{2}$　　D. $2m$

2. 设A为2阶矩阵，若已知$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，则$A^*=$

A. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

3. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是

A. α_1，$2\alpha_2$，$3\alpha_3$　　B. $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$

C. α_1，$2\alpha_1$，$\alpha_2-\alpha_3$　　D. $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$

4．设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，$|3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}|=$

A．$-\frac{3}{2}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{2}$

5．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为

A．$z_1^2+z_2^2+z_3^2$　　B．$z_1^2+z_2^2-z_3^2$　　C．$z_1^2-z_2^2$　　D．$z_1^2+z_2^2$

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6．设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & x\\ 3 & x & 8\end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的全部根为_________.

7．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ __________.

8．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=-\frac{1}{3}$，则行列式 $\left|(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^{-1}+3\boldsymbol{A}^*\right|=$_________.

9．$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{2016}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{2017}=$ __________.

10．设向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 线性表出，且表示法惟一，则 a 的取值应满足_________.

11．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-4,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,t)^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2，则 $t=$_________.

12．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，则 3 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为_________.

13．设$\lambda=-\dfrac{2}{3}$为n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值，则矩阵$2\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}^2$必有一个特征值为______.

14．设2阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为-2，2，则$\boldsymbol{A}^2=$_________.

15．设二次型$f(x_1,x_2)=tx_1^2+x_2^2-4tx_1x_2$正定，则实数$t$的取值范围是_________.

三、计算题：本大题共7小题，每小题9分，共63分。

16．计算4阶行列式$D=\begin{vmatrix}-2&3&0&0\\1&-2&3&0\\0&1&-2&3\\0&0&1&-2\end{vmatrix}$.

17．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{-1}$.

18．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{B}$.

19．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,4,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,-3,1,1)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20．已知线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2=a_1\\x_2-x_3=a_2\\x_3-x_1=a_3\end{cases}$

（1）讨论常数a_1,a_2,a_3满足什么条件时，方程组有解.

（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-3&0&2\\-3&1&1\end{pmatrix}$，判定$\boldsymbol{A}$是否可对角化并说明理由.

22．求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形.

四、证明题：本题 7 分。

23．设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是1.