

全国 2018 年 4 月高等教育自学考试

线性代数(经管类) 试题

课程代码:04184

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

选择题部分

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 设 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -1$, 则 $\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_1 - a_2 \\ b_1 + b_2 & b_1 - b_2 \end{vmatrix} =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

2. 设 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = a \neq 0$, 将 A 按列分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 若矩阵

$$B = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1), \text{ 则 } |B| =$$

- A. 0 B. a C. $2a$ D. $3a$

3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是

- A. $\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3$
 B. $\alpha_1, 2\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3$
 C. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$
 D. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$

4. 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 若矩阵 A 与 B 相似, 则矩阵 $3E - A$ 的秩为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则二次型 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 的规范形为

A. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ B. $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ C. $z_1^2 - z_2^2$ D. $z_1^2 + z_2^2$

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上, 不能答在试题卷上。

二、填空题: 本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分。

6. 设 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$, 若元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), 则

$$A_{31} + A_{32} + A_{33} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. 已知矩阵 $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, -1, 1)$, 且 $C = A^T B$, 则 $C = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = -\frac{1}{3}$, 则行列式 $\left| \left(\frac{1}{2} A \right)^{-1} + 3A^* \right| = \underline{\hspace{2cm}}.$

$$9. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2016} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2017} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

10. 设向量 $\beta = (1, 0, 0)^T$ 可由向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T$, $\alpha_2 = (1, a, 1)^T$, $\alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 线性表出, 且表示法唯一, 则 a 的取值应满足 $\underline{\hspace{2cm}}.$

11. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -4, 5)^T$, $\alpha_3 = (2, 0, t)^T$ 的秩为 2, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 已知 $\eta_1 = (1, 0, -1)^T$, $\eta_2 = (3, -1, 5)^T$ 是 3 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个解,

则对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有一个非零解 $\xi =$ _____.

13. 设 $\lambda = -\frac{2}{3}$ 为 n 阶矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $2E - 3A^2$ 必有一个特征值为_____.

14. 设 2 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $-2, 2$, 则 $A^2 =$ _____.

15. 设二次型 $f(x_1, x_2) = tx_1^2 + x_2^2 - 4tx_1x_2$ 正定, 则实数 t 的取值范围是_____.

三、计算题: 本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分。

16. 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

17. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0$ ($i=1, 2, 3, 4$), 求 A^{-1} .

18. 设 3 阶矩阵 A 与 B 满足 $AB + E = A^2 + B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B .

19. 求向量组 $\alpha_1 = (2, 1, 3, -1)^T$, $\alpha_2 = (3, -1, 2, 0)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 4, -2)^T$, $\alpha_4 = (4, -3, 1, 1)^T$ 的秩和一个极大线性无关组, 并将其余向量由该极大线性无关组线性表出.

20. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= -2 \\ x_2 - x_3 &= b \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 4 \end{cases}$$

确定 a, b 为何值时方程组有无穷多解并求出其通解 (要求用其一个特解和导出组的基础解系表示).

21. 已知 $\lambda = 0$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$ (其中 $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$) 的一个特征值, 求

A 的属于特征值 $\lambda = 0$ 的全部特征向量.

22. 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准形.

四、证明题: 本题 7 分。

23. 设 $\boldsymbol{\eta}$ 为非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个解, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 为其导出组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的两个线性无关的解. 证明向量组 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关.